2021-11-25 Primo Compitino Analisi 2

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

1. Email *

Istruzioni di compilazione: Si usi:

· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere ^ per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni >= per il maggiore o eguale $\geq$ e <= per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere _ per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 15 minuti)

2. Cognome

3. Nome

4. Matricola

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Consideriamo i seguenti insiemi:

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} > 1, x \geq 0, y < 2\},$$
$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \leq 2\}$$

6. 2 punti

Si dica se A è aperto:

Contrassegna solo un ovale.

- [x] Vero
- [ ] Falso

IN EFFETTI $A = \{ xy > 0, x \geq 0, y < 2 \} = \{ x > 0 , 0 < y < 2 \}$

A è definito mediante disuguaglianze strette

7. 2 punti

Si dica se B è chiuso:

Contrassegna solo un ovale.

- [x] Vero
- [ ] Falso

B è definito in termini di disuguaglianze deboli

8. 2 punti

Si dica quale delle seguenti affermazoni è vera:

(a) $B \subsetneq \partial A$;

(b) $\partial A \subsetneq B$;

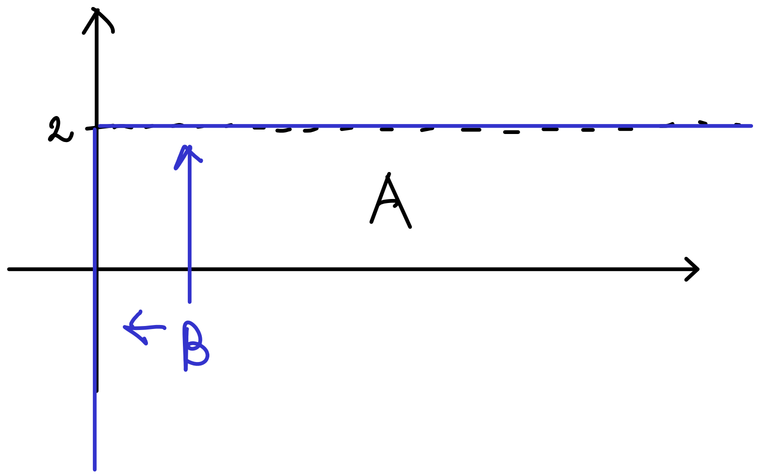
(c) $B = \partial A$;

(d) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (a)
- ( ) (b)
- ( ) (c)
- (X) (d)

$\partial A = \{x=0,\ 0 \le y \le 2\} \cup$
$\{x \geq 0,\ y=0\} \cup \{x \geq 0, y=2\}$



Esercizio Due

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

9. 3 punti

Posto $\varphi(t) := f(t, t^2)$ si calcoli $\varphi'(1)$.

-1

Se $\gamma(t) = (t, t^2)$
$\gamma'(t) = (t, 2t)$ $\gamma'(0) = (1,2)$
$\Rightarrow \varphi'(0) = \nabla f(1,1) \cdot \gamma'(0) = 1-2$

Esercizio Tre

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2+y^4} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \qquad\qquad f(0,0) := 0.$$

10. 1 punto

Si dica se f è continua:

Contrassegna solo un ovale.

- [x] Sì
- [ ] No

$$|f(x,y)| \leq \frac{|y|\,\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

11. 1 punto

Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) $f'(0,0)(\vec{v})$ non esiste per nessun $\vec{v}$;

(b) $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per alcuni $\vec{v}$ ma non per tutti;

(c) $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per tutti i $\vec{v}$;

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] (a)
- [ ] (b)
- [x] (c)

se $\vec{v} = (v_1, v_2) \Rightarrow$

$$\frac{f(t\vec{v})}{t} = \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t\,(t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2 + t^4 v_2^4)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2 + t^2 v_2^4} \longrightarrow \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(0,0)(\vec{v}) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}}$$

12. 1 punto

Si calcoli $f'(0,0)(1,1)$ oppure si scriva "non esiste":

$\frac{1}{2}$

13. 1 punto

Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$:

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] Sì
- [x] No

14.

1 punto

Si motivi brevemente la risposta precedente:

Dall'espressione di $f'(0,0)(\vec{v})$ si vede che $f'(0,0)(\vec{v})$ non è lineare in $\vec{v}$

Esercizio Quattro

15.

3 punti

Siano $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^N$ un punto di minimo relativo. Si dica quale delle seguenti proprietà è necessariamente vera:

1. $H_f(x_0) > 0$;
2. $H_f(x_0) \geq 0$;
3. $H_f(x) > 0$ per tutte le x vicine a x_0;
4. $H_f(x) \geq 0$ per tutte le x vicine a x_0;

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (1)
- (X) (2)
- ( ) (3)
- ( ) (4)
- ( ) nessuna delle precedenti

Esercizio Cinque

16. 3 punti

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y, z) := \sin(3xyz) + z\cos(xy).$$

Si calcoli la derivata:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(0,0,0).$$

3

$\sin(t) = t + o(t)$
$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$f(x,y,z) = 3xyz + o(xyz) + z\left(1 - \frac{1}{2}x^2y^2 + o(x^2y^2)\right) =$
$z + 3xyz + o(\|x,y,z\|^3)$

Esercizio Sei

17. 6 punti

Si calcoli la lunghezza del grafico della funzione:

$$f(x) = \cosh(x) \qquad \text{per } 0 \le x \le L$$

(in termini di $L > 0$).

$\sinh(L)$

$f' = \sinh(x)$
$l = \int_0^L \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx =$
$\int_0^L \sqrt{1 + \sinh^2(x)}\, dx = \int_0^L \cosh(x)\, dx$
$= [\sinh(x)]_0^L = \sinh(L)$

Esercizio Sette

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := (x^2 - y^2)(y + x^2)$$

$f = x^2y - y^3 + x^4 - x^2y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 4x^3 - 2xy^2 = 2x(y - y^2 + 2x^2)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3y^2 - 2x^2y = x^2(1 - 2y) - 3y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff x = 0 \ / \ 2x^2 = y^2 - y$

se $\boxed{x=0}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

se $\boxed{2x^2 = y^2 - y}$ da $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

ricavo

$\left(\frac{y^2 - y}{2}\right)(1 - 2y) - 3y^2 = 0 \iff$

$y(y-1)(1-2y) - 6y^2 = 0 \iff$

$y(y - 1 - 2y^2 + 2y - 6y) = 0 \iff$

$y(2y^2 + 3y + 1) = 0$

se $y = 0$ da $2x^2 = y^2 - y \Rightarrow x = 0$

Se invece $2y^2 + 3y + 1 = 0$ ho

$y = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ -1/2 \end{cases}$

Se $y = -1 \Rightarrow 2x^2 = 2 \iff x = \pm 1$

Se $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

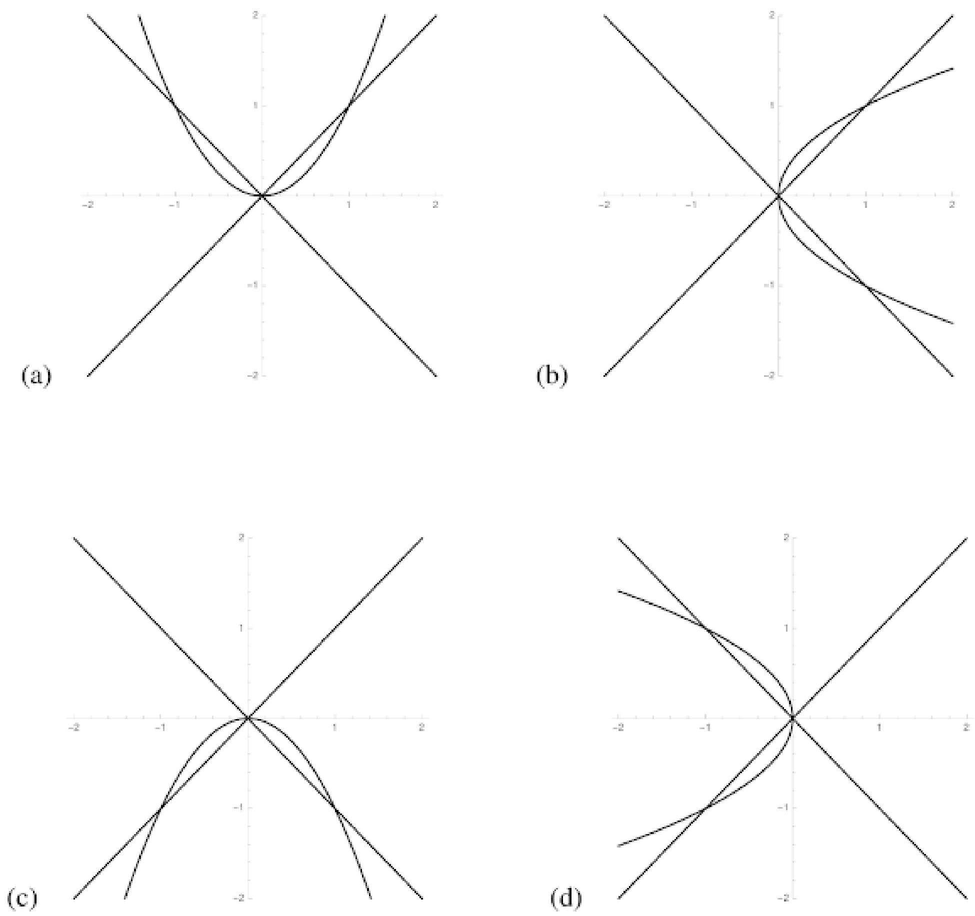
$\iff x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$= \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$

CONTINUA →

18. 2 punti

1. Si dica quale delle seguenti figure rappresenta l'insieme di livello $\{f(x,y)=0\}$:



(e) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- ☒ (c)
- (d)
- (e)

$f(x,y)=0 \iff$

$x+y=0$ oppure $x-y=0$ oppure $y+x^2=0$

$\Updownarrow$

$y=-x$ oppure $y=x$ oppure $y=-x^2$

→ Calcolo la matrice Hessiana:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y+12x^2-2y^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x-4xy$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y-2x^2$

$H_f(0,0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ (ma uso la linea di livello)

$H_f(\pm1,1)=\begin{bmatrix}8&\pm6\\\pm6&4\end{bmatrix}$ ← det $=32-36<0 \Rightarrow$ SELLA, . SI VEDE ANCHE DALLA LINEA DI LIVELLO

$H_f\left(\pm\frac{\sqrt6}{4},-\frac12\right)=\begin{bmatrix}3&\pm\sqrt6\\\pm\sqrt6&9/4\end{bmatrix}$ $a_{11}=3>0$ det $=\frac{27}{4}-3=\frac{3}{4}>0$ MINIMI

19. 8 punti

Si scrivano tutti i punti stazionari indicando per ognuno se si tratta di un minimo relativo (MIN), di un massimo relativo (MAX) o nessuno dei due (INDEF). È richiesto solo di fare una lista del tipo

(x_1, y_1) (MIN)
(x_2, y_2) (MIN)
(x_3, y_3) (MAX)
(x_4, y_4) (INDEF)

(0, 0) (INDEF)
(1, −1) (INDEF)
(−1, −1) (INDEF)
$\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ (MIN)
$\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ (MIN)

si vede dalla linea di livello $f = 0 = f(0,0) = f(\pm 1, -1)$

20. 2 punti

Si dica se f ha massimo su $\mathbb{R}^2$:

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] Sì
- [x] No

21. 2 punti

Si dica se f ha minimo su $\mathbb{R}^2$:

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] Sì
- [x] No